6th International Conference
APLIMAT 2007
Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Technology in Bratislava
Session: Open Source Software in Research and Education

VÝUČBA MATEMATIKY NA TECHNICKÝCH VŠ POMOCOU OPEN SOURCE SOFTVÉRU

BACHRATÁ, Katarína, (SK)

Abstrakt. Súčasná didaktika pozná dva základné prístupy na vyučovanie, transmisívny a konštruktívny. Mnohí učitelia matematiky sa hlásia ku konštruktivizmu, v rámci ktorého požadujú, aby študenti rozumeli matematickej podstate problémov, ktoré riešia a vedeli odvodiť všetko ďalšie, čo budú potrebovať. Nanešťastie matematika občas pri snahe presného dokazovania matematických teórií zabúda na ich zrozumiteľnosť. Na technických vysokých školách sa popri výučbe spôsobov riešenia matematických modelov zabúda na ich zostavovanie. Matematici si myslia, že tvorba modelov sa má učiť na odborných predmetoch, inžinieri zase, že pre svoje predmety vystačia s jednoduchšou matematikou, než akú učia matematici. V tomto článku by sme chceli ukázať, že je možné naučiť študentov viac aj pri rovnakom počte vyučovacích hodín venovaných predmetu. Ako nástroj bude použitý open source softvér podľa vlastného výberu študenta. Vhodnou voľbou úloh a problémov dostanú študenti príležitosť vyskúšať a porovnať možnosti viacerých softvérových systémov. V konkrétnych ukážkach v tomto článku je použitý softvér Octave a program, ktorý vytvoril študent. Zadávanie úloh a odovzdávanie riešení sa realizuje pomocou systému LMS Moodle. Ušetria sa tým náklady na tlačenie vyriešených úloh a študenti sa naučia používať prostredie, v ktorom komunikujú s učiteľmi na spoločnom portáli.

Kľúčové slová. Vyučovanie matematiky, Octave, Moodle, pravdepodobnosť, štatistika, lineárna regresia, Fourierova transformácia

TEACHING MATHEMATICS AT TECHNICAL UNIVERSITIES USING OPEN SOURCE SOFTWARE

Abstract. Contemporary didactic presents two approaches to teaching: formalism and constructivism. Mathematicians prefer the second one, which requires the students to understand the mathematical background of the problems, they are solving and to be able to derive anything else they will need. Unfortunately when trying to prove mathematical theories exactly, mathematicians sometimes forget about understandability. Similarly at technical universities, when teaching how to solve models, the teachers sometimes forget about constructing them. Mathematicians believe creating models should be taught in technical subjects, engineers on the other hand, think that for their subjects more simple mathematics, than that presented by mathematicians will be enough. In this article we would like to show how it is possible to teach students more (even with the same number of lessons). Open Source Software according the student's choice will be used. By means of appropriate selections of tasks and problems, the students will be given an opportunity to try and compare the possibilities of the several kinds of software. At the same time, they learn how to use at least one of Open Source Software like Octave or Scilab. The students receive the problems and hand in the solutions through the use of learning management system Moodle. This will not only save the printing costs, but it will mainly teach the students how to use the modern communication environment.
Key words and phrases. Teaching mathematics, Octave, Moodle, Probability, Statistics, Linear regression, Fourier transform

Mathematics Subject Classification. Primary 97D40, 97C70; Secondary 90B06.

1 Východiská

Osnovy a obsahy predmetov, ktoré má zvládnuť študent technickej vysokej školy sú stále rozsiahlejšie. Pritom si učitelia nerobia ilúzie o tom, že študenti budú potrebovať všetko, čo ich v škole naučia. Vďaka neuveriteľne rýchlemu vývoju napr. učiteľ informačných technológií občas nemôže pri skúške použiť ani fakty, ktoré učil ako novinku na začiatku semestra. Skôr je namieste pocit, že na to, aby mohli študenti správne používať jednotlivé modely a teórie, mali by dobre poznať súvislosti a všetky základné kamene, na ktorých je teória budovaná. Na technickej vysokej škole sú študentom prezentované aplikácie, ktoré vyžadujú náročný matematický aparát a tak sa ich tento aparát snažíme naučiť. A pretože matematici dostali vzdelanie, pri ktorom je matematika budovaná induktívne a každá nová definícia je postavená na pevných základoch, sú presvedčení, že takýto postup učenia matematiky je potrebný na jej pochopenie. Neveria tomu, že by bolo možné vynechať alebo preskočiť niektoré dôležité stavebné kamene matematiky. Už dávno bolo povedané, že „Niet kráľovskej cesty ku matematike!“ a kto chce poznať matematiku, musí na jej pochopenie a uchopenie vyvinúť veľa úsilia.

Na našich vysokých školách sa však úroveň poznania a ovládania matematiky u študentov veľmi vzďaľuje od schopnosti používať ju v reálnych technických aplikáciách. Ako môžeme pomôcť nájsť študentom prepojenie medzi matematickou teóriou a jej aplikáciou na riešenie konkrétnych úloh? Ako vlastne vysvetlíme študentovi, že matematika je naozaj užitočná a že sa oplatí rozumieť súvislostiam v jednom zovšeobecňujúcom princípe, a nie študovať nanovo vlastnosti každého ďalšieho modelu? Úlohy, na ktorých by takéto výhody pochopili, sú náročné na spracovanie a tu sa ukazuje výhoda využitia vhodného softvéru.

Problém je aj v časovej náročnosti. Ako máme stihnúť naučiť študentov ovládať softvér, keď nie je ani čas naučiť ich teoretické základy? Kde má nájsť čas učiteľ matematiky na to, aby napísal projekt, zohnal softvér, nainštaloval ho do laboratória (za predpokladu, že učí na tak osvietenej škole, že je možné učiť matematiku v počítačovej učebni) a udržoval učebňu v prevádzke? Kedy sa má naučiť so softvérom pracovať? A keď učiteľ všetko vybaví a naučí sa riešiť úlohy, ktoré chce zadať študentom, tak sa buď softvér zmení a pripravené veci treba prispôsobiť, alebo študenti potrebujú na spracovanie úloh viac času, než je im v laboratóriu možné prideliť, alebo by radi robili v softvéri, ktorý tam nie je nachystaný.

Nakoniec nadšenie pre nové metódy často skĺzne do rezignácie a návratu riešenia problémov na tabuli. U naozaj zanietených učiteľov na spracovanie a prípravu programov, ktoré predvedú zaujímavé a dôležité vlastnosti, ktoré chceme študentom povedať a ukázať. Študenti pri tomto prístupe ostávajú v úlohe pozorovateľov a nepreniknú do podstaty problémov. Napriek tomu, že riešenie videli a vedia ho zopakovať v školských podmienkach, nemajú zručnosti na jeho samostatné používanie.

Takže máme síce silnejšie technické prostriedky ako pán Euklides, ale naďalej musíme s jeho výrokom o neexistencii kráľovskej cesty súhlasiť. Otázkou ostáva, či naozaj potrebujeme pri výchove inžinierov vychovať najprv človeka, ktorý prejde celú cestu v matematike a až keď ju zvládne, tak ju bude ďalej rozvíjať v aplikáciach (technických, inžinierskych, alebo možno len praktických a užitočných). Alebo je predmet „matematika“ na technickej VŠ vstupným rituálom, ktorý preukáže mieru prispôsobivosti študenta, jeho schopnosti abstrakcie a navyše vytrvalosti pri riešení úloh? Študenti, ktorí dokážu úspešne absolvovať teóriu riešenia diferenciálnych rovníc, pojednať o súvise koeficientov a koreňov polynómov, či pochopiť pojem limes superior, budú schopní lepšie prosperovať aj v predmetoch týkajúcich sa ich odboru. A po skončení školy prehlásia, že matematike nikdy nerozumeli a ani ju nikdy nepotrebovali.

Je naozaj nutné, aby matematika bola strašidlom pre zvyšok školy, aby presné vyjadrovanie a jednoznačné definície boli len privilégiom matematických predmetov? Netreba objektívnosť, argumentáciu a ochotu korigovať vlastné riešenia ponúknuť aj mimo matematiky? Nespôsobujú si nepochopenie často matematici sami? Naozaj nedokážu odhadnúť, že študent, ktorý príde na vysokú školu s vedomosťami z učňovskej školy, nedokáže pracovať s algebrickými štruktúrami inak než formálne a bez porozumenia? Musíme v prvom ročníku učiť rovnakú matematiku študenta, ktorý má po čase dosiahnuť až na doktorandský titul aj študenta, ktorý má v pláne získať bakalársky titul?

Je to patetické, ale Slovensko potrebuje dobrých bakalárov. A pokiaľ možno sebavedomých a spokojných a nie zatrpknutých a urazených, ktorým bolo na vysokej škole ukázané, že v matematike zlyhali. Naša súčasná situácia je taká, že vysokokvalitní odborníci, ktorých sú schopné naše školy vychovať, odchádzajú pracovať do zahraničia. Vážme si študentov, ktorí ostanú pracovať na Slovensku a skúsme ukázať užitočnosť matematiky aj študentom, ktorí nebudú v praxi ani v ďalšom štúdiu potrebovať rozsiahle teoretické matematické základy. Pokúsme sa diferencovane ponúknuť študentom čo najviac podľa ich schopností a tak, aby mohli dobrý výkon podať aj slabší študenti.

Ambíciou tohto článku nie je ponúknuť riešenie problémov uvedených v predchádzajúcom odseku. Jeden z návrhov riešenia si je možné pozrieť v [5]. Na začiatok bude dobré si tieto problémy uvedomiť. Snažiť sa súčasnú náplň matematických predmetov učiť so zreteľom na nastolené problémy. Napríklad tak, že výpočtovo náročné úlohy necháme urobiť počítaču.

V nasledujúcom texte sú popísané niektoré skúsenosti z vyučovania pravdepodobnosti na Fakulte riadenia a informatiky v Žiline, ktorých spoločným prvkom je využitie open source softvéru pri spracovaní úloh. Úlohy sú zámerne volené tak, aby pri ich riešení študenti získali čo najviac skúseností nielen s matematickými modelmi, ale aj s dejmi, ktoré ich v praxi vyjadrujú a s použitím softvéru, ktorého vhodnosť na riešenie úlohy nie je vopred známa.

2 Ilustrácie v predmete Pravdepodobnosť a štatistika

Nerovnováha medzi učením vytvárania modelov a učením technických prostriedkov na ich riešenie sa asi najvýraznejšie prejavuje v predmetoch pravdepodobnosť a štatistika. Predstava distribučnej funkcie diskrétnej náhodnej premennej je veľmi názorná a študenti nemajú najmenší problém pochopiť ako dostaneme jej hodnoty v jednotlivých bodoch reálnej osi. V prípade, že počítame hodnoty distribučnej funkcie spojitej náhodnej premennej pomocou integrálov, študenti zabudnú počas výpočtu integrálu, čo vlastne počítajú a tak síce dospejú k správnemu výsledku, ale nevedia, čo znamená. Pri vysvetľovaní významu výpočtu hodnôt distribučnej funkcie pomocou integrálov narážame na problém, že pre jednoduché rozdelenia vieme urobiť výpočet aj bez integrovania a pri zložitejších je výpočet integrálu tak náročný, že je na hranici schopností študentov.

Navyše, pri výpočte hodnôt distribučnej funkcie normálneho rozdelenia namiesto výpočtu integrálov, používame tabuľky! Pretože v tomto prípade to pomocou integrálu vypočítať nepôjde. Presne povedané, integrál z hustoty rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej s normálnym rozdelením sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Pri vyučovaní namiesto tréningu techník počítania integrálov sa budú teraz študenti učiť, ako hľadať hodnoty v tabuľkách. A aby to bolo efektívne, dostanú všetci študenti rovnaké tabuľky. Ľahko nahliadneme, že študenti medzičasom dávno zabudli, že počítajú obsah plochy pod krivkou hustoty a že tá plocha je vlastne nejaká pravdepodobnosť. Je možné, že študenti všetky naučené vedomosti po skončení semestra stratia spolu s tabuľkami. Navyše, učiteľ prestáva pôsobiť dôveryhodne, keď rovnakú úlohu požaduje (bez vysvetlenia) riešiť rôznymi technikami, niekedy integrovaním, inokedy hľadaním v tabuľkách. Učiteľ by vedel zdôvodniiť, prečo je možné niektoré integrály vypočítať iba numericky, ale to nemá čas urobiť v kurze teórie pravdepodobnosti.

Predstavme si iný spôsob ako vysvetliť študentom výpočet hodnôt distribučnej funkcie. Zoberme si hustotu rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti na intervale $\langle 1,3\rangle$. Táto hustota má tvar

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x<1,\\ \frac{1}{2} & \text{pre} \quad 1\leqq x\leqq 3,\\ 0 & \text{pre} \quad x>3. \end{cases}$$

Hodnoty distribučnej funkcie $F(x)$ dostaneme ako plochu pod krivkou $f(x)$, ktorú vypočítame ako plochu obdĺžnika so stranami $1/2$ a $(x-1)$, alebo dosiahne hodnotu 0 alebo 1. V tomto prípade sa dá aj slabším študentom ukázať, ako sa rovnaký výsledok dá získať pomocou integrovania funkcie hustoty $f(x)$. Teda

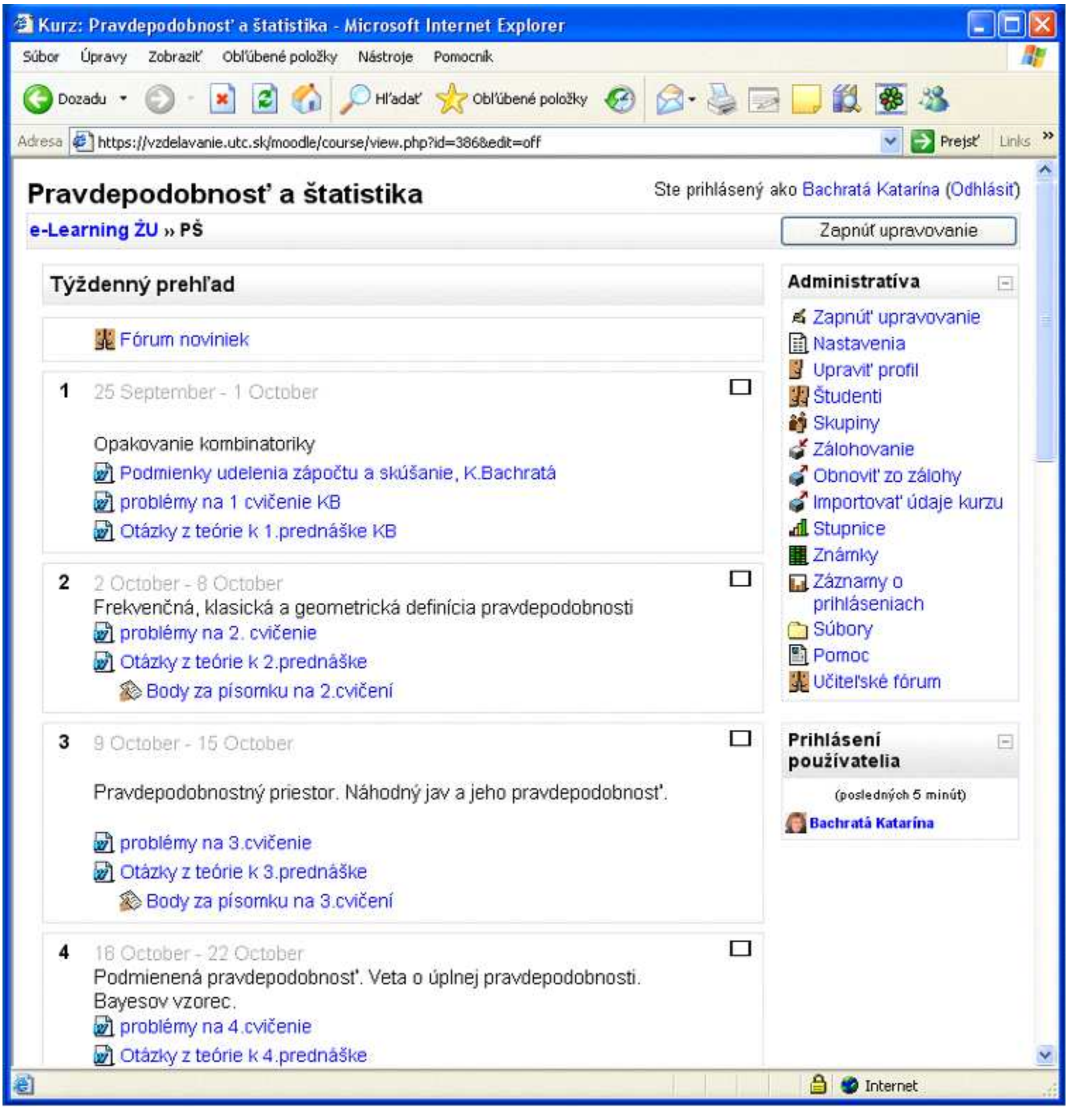
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x<1,\\ \frac{1}{2}(x-1)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=[0]_{-\infty}^{1}+\left[\frac{t}{2}\right]_{1}^{x}=0+\frac{x}{2}-\frac{1}{2} & \text{pre} \quad 1\leqq x\leqq 3,\\ 1 & \text{pre} \quad x>3. \end{cases}$$

Nasleduje domáca úloha nájsť softvér, ktorý tento integrál vypočíta. Riešenie takejto úlohy je v silách všetkých študentov. Navyše budú vedieť, čo vlastne riešia. Keby si nevedeli rady, môžeme im poradiť niektorý zo softvérových systémov Octave, Kpl, QtiPlot [6–8].

Nie je však nutné ponúkať konkrétny softvér skôr, než nejaký skúsia nájsť sami. Takýto prístup má hneď niekoľko výhod. Na vlastných chybách sa študenti naučia najviac a kde inde ako v škole by sa mali dozvedieť, že nie všetky softvérové produkty naozaj robia to, čo deklarujú. Napríklad výpočet hodnôt exponenciálnej funkcie bude v tabuľkových procesoroch menej presný než v programoch na to určených. Na druhej strane sa v tabuľkových procesoroch dajú jednoducho vypisovať tabuľky, vykresľovať grafy rôznych závislostí a histogramy (pozri napr. [9]).

Ak učitelia netrvajú na tom, aby použili študenti rovnaký postup, môžu sa dozvedieť o nových produktoch. Nemajú čas učiť sa každý z programov, ktoré študenti použijú. Lenže to ani nie je potrebné. Stačí, ak na základe výsledkov skontrolujú úlohy. A pre študenta je to tiež nová skúsenosť. Má vysvetliť učiteľovi niečo, čo učiteľ nepozná, a nie hovoriť riešenie, ktoré učiteľ pozná a očakáva. Týmto sa priblížime o kúsok bližšie k cieľu naučiť našich študentov veriť si a svoje výsledky naozaj vysvetliť. Nie preto, aby bol učiteľ s vysvetlením spokojný, ale aby ho pochopil. Nastáva situácia, kedy študent vie viac ako učiteľ a chce mu svoju vedomosť odovzdať nie kvôli známke, ale aby sa učiteľ dozvedel niečo nové. Tento pocit by sme mali študentom vysokej školy dopriať.

Úlohy zadávame v prostredí LMS Moodle [3, 4], upravenom pre potreby ŽU. Na obrázku 1 je vyobrazené prostredie Moodle tak, ako ho používame v predmete pravdepodobnosť.



Obrázok 1: Prostredie Moodle

Ako zdroj úloh môžeme využívať obrovské množstvo dát, ktoré poskytuje Internet. Príkladom úlohy bude n ájsť dáta, ktoré predstavujú 100 realizácií nejakej náhodnej premennej. Pomocou histogramu treba usúdiť, aký tvar bude mať rozdelenie tejto náhodnej premennej. Tým, že študenti nemajú presne zadané, aké dáta majú nájsť, musia dobre porozumieť pojmu výber hodnôt náhodnej premennej.

Výsledky, ktoré študenti dostanú spracovaním takýchto dát, sa dajú dobre skontrolovať aj napriek tomu, že na ich spracovanie použijú rôzne programy, ktoré vyučujúci nemusí poznať, ani ovládať. Z charakteru dát vie odhadnúť, či je výsledok správny. Okamžite sa tiež objavuje potreba a možnosť interpretácie výsledkov, čo je na rozdiel od umelo vymyslených úloh, zaujímavý problém.

Počas dvoch rokov, v ktorých takéto problémy zadávam, nebol problém nájsť zodpovedajúci súbor dát, aj keď študenti sa spočiatku neštrukturovane zadaným úlohám intenzívne bránia. Príkladmi dát, ktoré naši študenti našli a použili, boli napríklad šírka letokruhov na storočnej sekvoji, kurz koruny a eura, intervaly medzi príchodmi zamestnancov našej univerzity merané v dochádzkovom systéme, výška a váha hráčov hokeja, či basketbalu, výsledky lotérií. . .

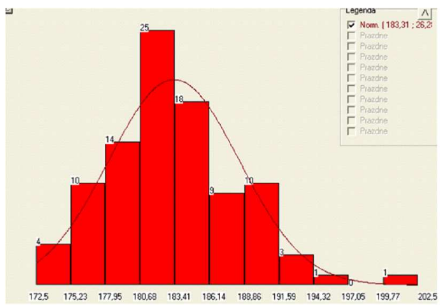
Na obrázku 2 je vypracovanie [12] úlohy študenta 2. ročníka bakalárskeho študijného programu Informačné systémy, na fakulte FRI ŽU. Úlohou bolo nájsť dáta zodpovedajúce normálnemu rozdeleniu pravdepodobnosti a odhadnúť parametre tohto rozdelenia. Spracované boli dáta popisujúce výšku profesionálnych hráčov NHL a je ich možné nájsť na stránke `www.nhl.com/players`.

Z internetu som si stiahol údaje týkajúce sa výšok profesionálnych hráčov Národnej Hokejovej Ligy (NHL). A podrobne som sa zaoberal týmito údajmi.
Nasledujúce údaje si môžete overiť na stránke : www.nhl.com/players

meno	výška	meno	výška	meno	výška	meno	výška
ABID	185	ERSKINE	190	KOMISAREK	190	SHARP	182,5
BRIND'AMOUR	182,5	EMINGER	185	KNUTSEN	177,5	SLANEY	180
RISSMILLER	190	ERAT	177,5	KLEE	180	SKRASTINS	182,5
AMONTE	180	FISCHER	192,5	LAAKSONEN	180	STEWART	175
BARINKA	187,5	FLEISCHMANN	182,5	LAAKSONEN	177,5	SVATOS	177,5
REIRDEN	192,5	FEDOROV	185	MCCARTHY	187,5	TAYLOR	185
LAMOTHE	185	FRITSCHE	182,5	MODIN	190	TRNKA	185
ERIC DAZE	195	FRIESEN	182,5	NIEMINEN	182,5	TVERDOVSKY	182,5
DENIS	182,5	GABORIK	182,5	NYSTROM	182,5	ULANOV	187,5
ARMSTRONG	180	GREEN	177,5	NORTON	190	UMBERGER	185
BALASTIK	185	HAINSEY	187,5	NAZAROV	192,5	VAUCLAIR	180
BOYNTON	185	HEEREMA	182,5	NEDVED	187,5	VYBORNY	175
BARINKA	187,5	HIGGINS	180	NYLANDER	182,5	VANEK	185
BICEK	175	HRDINA	180	NEDOROST	182,5	VOKOUN	180
BARNES	182,5	HOLIK	190	MORAN	177,5	WARD	185
CARTER	182,5	IGINLA	182,5	OLESZ	182,5	WRIGHT	180
CIBAK	182,5	IVANANS	190	OUELLET	180	WHITE	175
CHARA	202,5	JURCINA	190	ORSZAGH	177,5	YORK	182,5
CUTTA	187,5	JAGR	187,5	PALFFY	177,5	ZINOVJEV	175
CHIMERA	185	JANIK	185	POPOVIC	182,5	ZHITNIK	177,5
CORSO	172,5	JOHNSON	182,5	QUINT	185	GIROUX	182,5
DEMITRA	180	KABERLE	180	RADIVOJEVIC	185	MCCABE	185
DRAKE	180	KOLNIK	175	RAFALSKI	175	MCVICAR	190
DIMAIO	175	KLEIN	182,5	ROSA	177,5	MAJESKY	190
BERNIER	185	EAGER	185	KLESLA	187,5	SALEI	182,5

```
Typ rozdelenia pravdepodobnosti : NORMÁLNE ROZDELENIE
Vypočítané hodnoty:
Najmenšia hodnota NV :172,5
  Najväčšia hodnota NV :202,5
  Aritmetický priemer = 183,3086
  Výberový rozptyl = 26,2774
  Odhad strednej hodnoty  m  = 183,3086
  Odhad disperzie σ² = 26,2774
```

```
Typ rozdelenia pravdepodobnosti : NORMÁLNE ROZDELENIE
Vypočítané hodnoty:
Najmenšia hodnota NV :172,5
  Najväčšia hodnota NV :202,5
  Aritmetický priemer = 183,3086
  Výberový rozptyl = 26,2774
  Odhad strednej hodnoty  m  = 183,3086
  Odhad disperzie σ² = 26,2774
Histogram a teoretická funkcia hustoty náhodnej premennej
s normálnym rozdelením pravdepodobnosti so strednou
hodnotou 183,31 a
s disperziou 26,2774.
```




```
Naprogramované v jazyku C++
```

Obrázok 2: Dáta predstavujúce náhodnú premennú s normálnym rozdelením pravdepodobnosti

3 Ilustrácie v predmete Analýza procesov

V predmete analýza procesov majú študenti predvedených niekoľko na prvý pohľad odlišných metód na jeden jednotiaci princíp (podrobnejšie v prednáškach [10]). Tým princípom je, že ortogonálny priemet nejakého vektora do podpriestoru je jeho najlepšou aproximáciou spomedzi všetkých vektorov tohto podpriestoru. Pre budúcich inžinierov je dobré si uvedomiť, že ako ortogonálny priemet vektora do podpriestoru sa dá chápať aj lineárna regresia, aj Fourierova transformácia, či dokonca Karhunenova a Loēvova transformácia. Študenti vyriešia úlohu na cvičeniach na konkrétnom príklade s diskrétnym časom a s malým počtom hodnôt. Doma potom tú istú úlohu riešia už s použitím open source softvéru, pre omnoho väčší súbor dát.

Na ilustráciu použijeme príklad na lineárnu regresiu. Úloha spočíva v nájdení priamky, ktorá je najbližšie v zmysle euklidovskej metriky k pôvodným dátam. Jednotlivé hodnoty procesu namerané v časoch $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$ budú predstavovať zložky vektora $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$. Tieto dáta aproximujeme vektorom s hodnotami $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{N-1})$

$$\tilde{\mathbf{f}} = (c_0 + c_1 t_0, \ldots, c_0 + c_1 t_{N-1}) = c_0(1,1,\ldots,1) + c_1(t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}).$$

Budeme teda hľadať najbližší vektor k vektoru $\mathbf{f}$ spomedzi všetkých vektorov $\tilde{\mathbf{f}}$ na priamke $y = c_0 + c_1 t$, t. j. spomedzi všetkých vektorov podpriestoru generovaného bázou $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_0 = (1,1,\ldots,1), \mathbf{b}_1 = (t_0, t_1, \ldots, t_{N-1})\}.$$

Najbližším vektorom je ortogonálny priemet $\tilde{\mathbf{f}}$ vektora $\mathbf{f}$ do tohoto podpriestoru. Potom vektor $\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}$ musí byť kolmý na každý vektor bázy podpriestoru a teda pre skalárny súčin pôvodného vektora a bázových vektorov bude platiť

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{b}_0 = \tilde{\mathbf{f}} \odot \mathbf{b}_0, \qquad \mathbf{f} \odot \mathbf{b}_1 = \tilde{\mathbf{f}} \odot \mathbf{b}_1.$$

Ak dosadíme $\tilde{\mathbf{f}} = c_0 \mathbf{b}_0 + c_1 \mathbf{b}_1$, tak z vlastností skalárneho súčinu ľahko odvodíme, že koeficienty c_0, c_1 sú riešením sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych:

$$c_0 N + c_1 \sum_{k=0}^{N-1} t_k = \sum_{k=0}^{N-1} f_k, \qquad c_0 \sum_{k=0}^{N-1} t_k + c_1 \sum_{k=0}^{N-1} t_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} f_k t_k.$$

Odstránením časovej závislosti z vektora $\mathbf{f}$ dostaneme vektor $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}$, v ktorom budeme zisťovať periodické trendy. Tie určíme pomocou diskrétnej Fourierovej transformácie, konkrétne amplitúdového spektra procesu $\mathbf{g}$. Spektrum vektora $\mathbf{g}$ dostaneme ako koeficienty jeho priemetu do harmonickej bázy: $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_n\}_{n=0}^{\infty}$ kde $\mathbf{b}_n = (1, \omega^n, \omega^{2n}, \ldots, \omega^{(N-1)n})$, pričom $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}$.

Tentokrát však na ich výpočet nebudeme potrebovať sústavu rovníc, ale len jednoduché vzorce. Harmonická báza je totiž ortogonálna a tak z pôvodnej sústavy ostanú len členy, v ktorých nevystupuje skalárny súčin dvoch rôznych vektorov harmonickej bázy. Pre výpočet koeficientov v harmonickej báze teda dostávame:

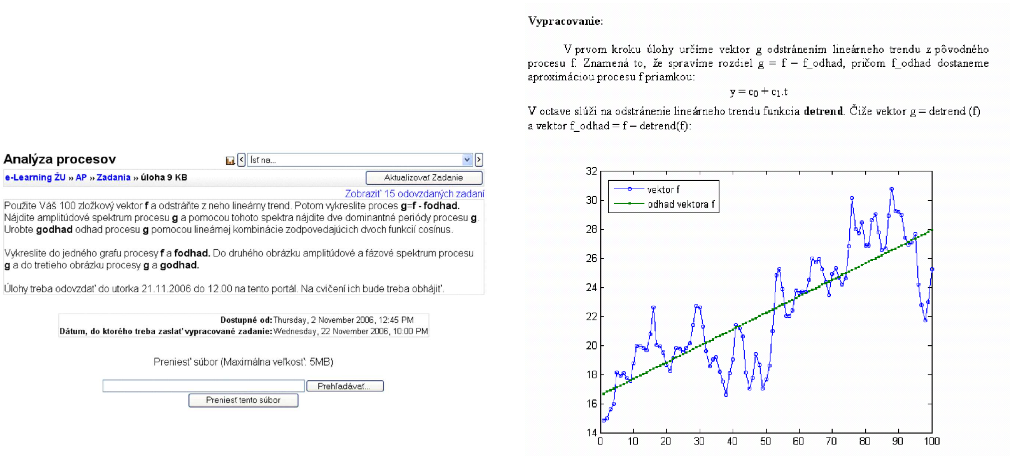
$$c_n = \frac{\mathbf{g} \odot \mathbf{b}_n}{\mathbf{b}_n \odot \mathbf{b}_n}, \qquad c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{N} k}.$$

Porovnaním veľkostí týchto koeficientov zistíme, ktoré z vektorov bázy majú na proces najväčší vplyv a teda, ktoré periódy v procese sú najviac dominantné. Rovnako, ako pri lineárnej regresii, aj teraz vyjadríme aproximáciu pôvodných dát $\mathbf{g}$ pomocou menšieho počtu koeficientov. Odhad $\tilde{\mathbf{g}}$ pomocou koeficientov c_m a $c_{N-m} = \overline{c_m}$ bude:

$$\tilde{\mathbf{g}} = c_m \mathbf{b}_m + c_{N-m} \mathbf{b}_{N-m} = 2\,\mathrm{Re}\{c_m\} \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) - 2\,\mathrm{Im}\{c_m\} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

Po odstránení periodického trendu môžeme v úlohe pokračovať a vyjadriť priemet procesu do Karhunenovej a Loẽvovej bázy, ktorej vektory sú vlastné vektory kovariančnej matice procesu. V tomto prípade však budeme na výpočet potrebovať niekoľko realizácií pôvodného procesu. Vyjadrenie procesu v báze pozostávajúcej z vlastných vektorov je známe aj pod názvom PCA (Principal Components Analysis), našim cieľom bude ukázať študentom, že aj v tomto prípade sa metóda dá interpretovať a odvodiť ako ortogonálny priemet vektora do podpriestoru generovaného určitou bázou. V prípade lineárnej regresie bázu podpriestoru určíme vopred, v prípade Fourierovej transformácie je báza určená základnou frekvenciou $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}$ a vyššími harmonickými frekvenciami, v prípade Karhunenovej a Loẽvovej transformácie je báza závislá od charakteristík skúmaného procesu.

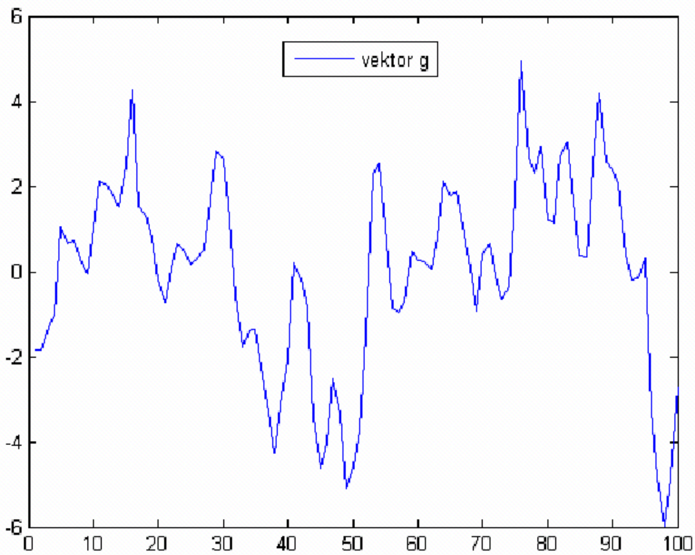
Zadávanie problémov a ich kontrolu realizujeme cez systém Moodle. Na obrázkoch 3 a 4 vidíme zadanie úlohy lineárnej regresie a DFT tak, ako ho v systéme vidia študenti. Nasleduje vyobrazenie prostredia na komunikáciu s jedným konkrétnym študentom.



Obrázok 3: Lineárna regresia

Na ilustráciu si pozrime vypracovanie úlohy [11], ktoré odovzdala študentka 4. ročníka, študijného programu Informačné a riadiace systémy, zameranie Management, na fakulte FRI ŽU. Spracované boli dáta popisujúce percentuálny vývoj nezamestnanosti počas 100 mesiacov v rokoch 1992 až 2000, vo Vranove nad Topľou. Dáta je možné nájsť na stránke `http://www.oupvranov.sk/Nezamestnanost%201991-2000.htm`

Na obrázku 3 je vykreslená lineárna regresia, teda nájdenie priamky, ktorá je najbližšie v zmysle Euklidovskej metriky k pôvodným dátam. Namiesto pôvodných 100 hodnôt, sú na vyjadrenie dát použité iba 2 koeficienty.



Takto získaný vektor g musíme vyjadriť v harmonickej báze a určiť jeho amplitúdové a fázové spektrum. Spektrum procesu g určíme fourierovou transformáciou. V octave sa dá táto transformácia vykonať pomocou f-cie **fft**, pričom získane spekrum je potrebné ešte predeliť počtom zložiek vektora g:

spektrum = (fft (g)) / 100

Amplitúdové spektrum získame určením absolútnych hodnôt jednotlivých zložiek spektra procesu g v harmonickej báze:

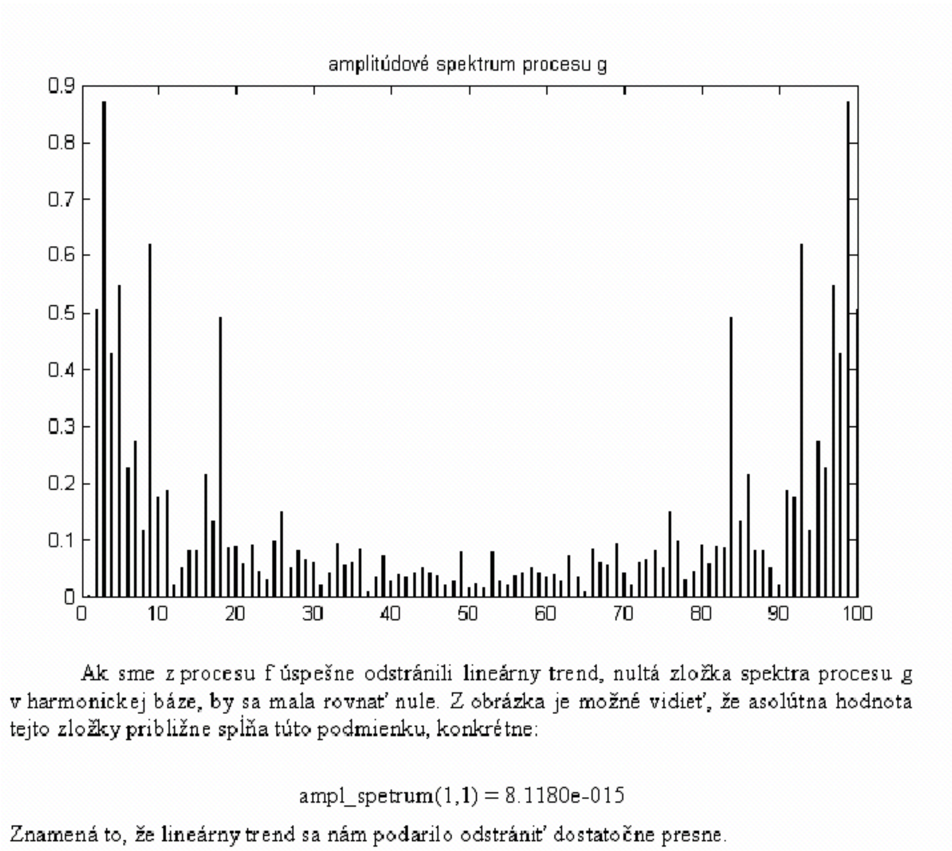
ampl_spektrum = abs(spektrum)

Fázové spektrum získame určením veľkosti uhlov jednotlivých zložiek spektra procesu g v harmonickej báze:

faza_spektrum = angle(spektrum)

Obrázok 4: Zadanie úlohy a komunikácia so študentom

Na obrázku 5 je zobrazený proces po odstránení časovej závislosti, na obrázku 6 vidíme spektrum tohoto procesu a na obrázku 7 je vykreslená aproximácia procesu súčtom dvoch harmonických funkcií.



Obrázok 5: Odstránená časová závislosť

4 Záver

Technické vysoké školy zápasia v súčasnosti s neustále sa zvyšujúcimi nárokmi na študentov a zároveň so slabšími základmi, ktoré majú študenti prichádzajúci študovať. Dnes naozaj nestačí našich informatikov a managerov naučiť to, čo sme ich učili pred 15 rokmi, niektoré predmety museli vzniknúť nové, tak ako vznikli nové technológie. Na druhej strane na vysoké školy prichádza väčšie percento populácie a preto priemerné schopnosti študentov budú trochu nižšie ako pred 15 rokmi. Ak teda my učitelia matematiky nechceme ostať nepochopení, musíme študentom umožniť, aby zvládli to, čo chceme, aby študovali. Potrebujeme urobiť matematiku prístupnejšou.

Neznamená to, že matematika má byť ľahšia, alebo že máme naučiť študentov menej. Matematika má byť iná. Nie matematika ako taká, ale matematika, ktorú učíme študentov na technických vysokých školách. Má byť taká, aby ju naši študenti vedeli používať, aby vedeli pomocou nej tvoriť. Na vyučovaní by sme mali od trénovania výpočtov prejsť na riešeniu

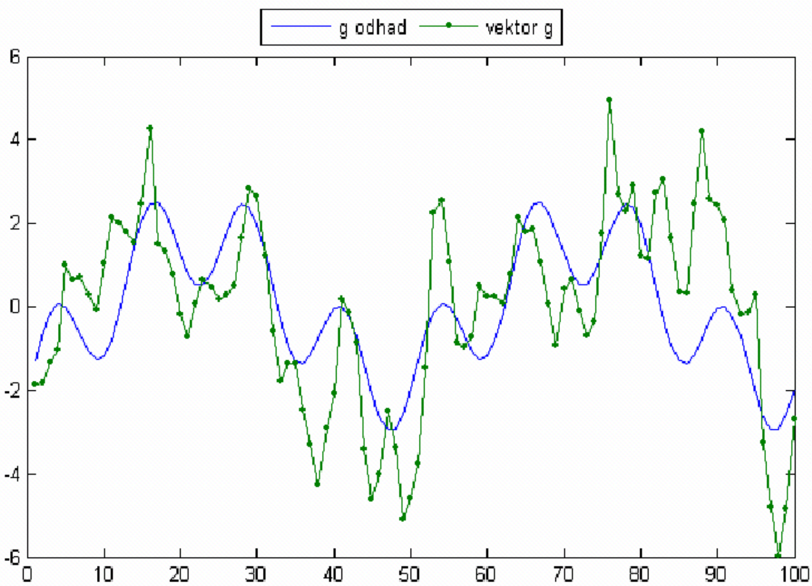
Takto sme zistili, že najviac dominantné periódy predstavujú tretia a deviata hodnota amplitúdového spektra a taktiež ich komplexne združené hodnoty, čiže devät'desiatadeviata a devät'desiatatretia hodnota. Perióda, ktorá zodpovedá tretej a devät'desiatejdeviatej hodnote amplitúdového spektra sa počas priebehu procesu g zopakuje dvakrát a perióda, ktorá zodpovedá deviatej a devät'desiatejtretej hodnote amplitúdového spektra sa počas priebehu procesu g zopakuje osemkrát.

Odhad procesu g urobíme pomocou lineárnej kombinácie dvoch funkcií kosínus, ktoré zodpovedajú dvom najdominantnejším periódam procesu g. Môžeme to urobit' pomocou spätnej fourierovej transformácie alebo pomocou vzt'ahu:

$$c_n . h_n + c_{N-n} . h_{N-n} = \left[2.|c_n|.\cos\left(\frac{2.\pi}{N}.n.k - \varphi_n\right)\right]_{k=0}^{99}$$

Zápis v octave:

```
g_odhad=2*abs(spektrum(1,3))*cos(2*pi*2*(0:99)/100+angle(spektrum(1,3)))+2*abs(spektrum(1,9))*cos(2*pi*8*(0:99)/100+angle(spektrum(1,9)))
```



Obrázok 6: Spektrum procesu v harmonickej báze

slovných úloh a na tvorbu modelov. Výpočty zvládne kalkulačka, teda po našom softvér, ale tvorba modelov bude stále úlohou inžiniera. Tak nech je náš študent v riešení problémov dobrý, na jemu adekvátnej úrovni. A nech vie o tom, že je dobrý.

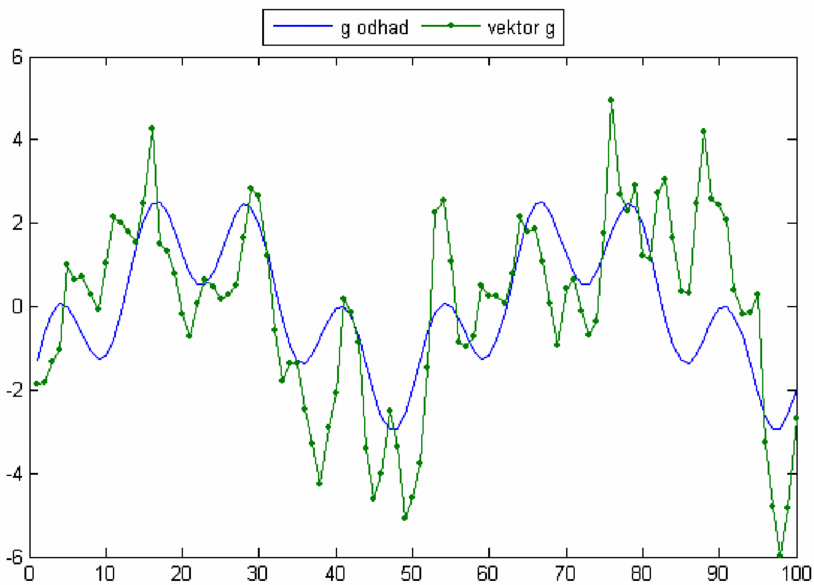
Takto sme zistili, že najviac dominantné periódy predstavujú tretia a deviata hodnota amplitúdového spektra a taktiež ich komplexne združené hodnoty, čiže deväťdesiatadeviata a deväťdesiatatretia hodnota. Perióda, ktorá zodpovedá tretej a deväťdesiatejdeviatej hodnote amplitúdového spektra sa počas priebehu procesu g zopakuje dvakrát a perióda, ktorá zodpovedá deviatej a deväťdesiatejtretej hodnote amplitúdového spektra sa počas priebehu procesu g zopakuje osemkrát.

Odhad procesu g urobíme pomocou lineárnej kombinácie dvoch funkcií kosínus, ktoré zodpovedajú dvom najdominantnejším periódam procesu g. Môžeme to urobiť pomocou spätnej fourierovej transformácie alebo pomocou vzťahu:

$$c_n . h_n + c_{N-n} . h_{N-n} = \left[2.\left|c_n\right|.\cos\left(\frac{2.\pi}{N}.n.k - \varphi_n\right)\right]_{k=0}^{99}$$

Zápis v octave:

g_odhad=2*abs(spektrum(1,3))*cos(2*pi*2*(0:99)/100+angle(spektrum(1,3)))+2*abs(spektrum(1,9))*cos(2*pi*8*(0:99)/100+angle(spektrum(1,9)))



Obrázok 7: Aproximácia procesu súčtom dvoch harmonických funkcií

Literatúra

[1] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*. (Konstruktivistické přístupy k vyučování). Praha, Portál 2001, ISBN 80-7178-581-4

[2] Vopěnka, P.: *Calculus infinitesimalis*. MFF UK Praha, 1996, ISBN 80-85809-52-4

[3] Mikuš, Ľ., Čerňanská, M., Škvarek, O.: *LMS systém Moodle, LMS systems using T FMSI UZ*. In: Zborník príspevkov zo 4. celoštátnej konferencie Infovek, Spišská Nová Ves, 2003, Bratislava: ústav informácií a prognóz školstva, 2004, ISBN 80-7098-381-7

[4] Mikuš, Ľ., Ivaniga, P.: *Multimediálne prvky v digitálnej knižnici*. In: ITlib Informačné technológie a knižnice, centrum VTI SR, Bratislava, ročník 10, číslo 3/2006, ISSN 1335-793X

[5] Klimo, M.: *Čo z matematiky učiť pre IKT?* In: Zborník príspevkov z letnej školy vyučovania matematiky Pytagoras, Bratislava : P-MAT, 2006, ISBN 80-969414-7-X

[6] Kaukič M.: *Open Source Software resources for numerical analysis teaching*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2005, ISSN 1473-0111, CIMT Plymouth, Electronic journal, 9 pages

[7] Buša, J.: *Octave*. Košice, 2006, ISBN 80-8073-595-6

[8] Ševčovič, L.: *Programy na spracovanie a vizualizáciu experimentálnych dát*. Košice, 2006, ISBN 80-8073-638-3

[9] Peško, Š.: *Pohodlná optimalizácia reálnych úloh v tabuľkových procesoroch*. Slovak Society for Operations Research, 7-th international seminar, Application of quantitative methods in research and practice, pp. 29–35, ISBN 80-225-2079-9, Remata, 2005

[10] Klimo, M.: *Texty prednášok k predmetu Analýza procesov*. Elektronická podpora vzdelávania ŽU, `http://vzdelavanie.utc.sk`, Žilina, 2003

[11] Tulejová, L.: *Domáca úloha z predmetu Analýza procesov*. Elektronická podpora vzdelávania ŽU, `http://vzdelavanie.utc.sk`, Žilina, 2006

[12] Bereň, T.: *Domáca úloha z predmetu Pravdepodobnosť a štatistika*. Elektronická podpora vzdelávania ŽU, `http://vzdelavanie.utc.sk`, Žilina, 2005

Kontaktná adresa

Katarína Bachratá, (RNDr., PhD.),
Katedra matematických metód, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, `katarina.bachrata@fri.utc.sk`

6th INTERNATIONAL CONFERENCE APLIMAT
Section Open Source Software in Research and Education
February 6–9, 2007
Bratislava, Slovakia

Organizers: Michal Kaukič and Miloš Šrámek
Reviewers: Ján Buša, Michal Kaukič, Dušan Mamrilla, Peter Mann, Andrej Petráš, Karel Šotek and Miloš Šrámek
Editors: Michal Kaukič, Miloš Šrámek, Ladislav Ševčovič and Ján Buša

ISBN 978-80-969562-7-2

Zborník bol vydaný s podporou SKOSI, n. o.
